УДК 550.831+550.8

Ю. І. Дубовенко

Про визначення контакту в модельному класі Сретенського

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Сформульовано обернену контактну задачу гравіметрії для контактної поверхні в класі Сретенського. Доведено розривність вертикальної похідної сили тяжіння, яка фігурує в її правій частині. Цю особливість було використано для редукції задачі до альтернативної постановки у вигляді інтегрального рівняння 1-го роду. Шляхом різницевого аналізу меж відповідних інтегралів виведено ефективний спосіб послідовного обчислення контактів. Задача узагальнюється на n меж та зберігає коректність у межах класу Сретенського.

З початку XXI ст. відбувається неперервна зміна основної парадигми теорії інтерпретації потенціальних полів [1]. Вона супроводжується переглядом ключових методологічних [2], апаратно-програмних [3] та числових [4] засад тлумачення даних цих полів. У рамках створення числового базису нової парадигми особливого значення набуває розробка адекватного геофізичній практиці апарату математичного моделювання геофізичних подів, адаптованого до обробки масивів даних великої розмірності, в тому числі й на комплексах паралельних обчислень.

Ключове місце в рамках нової методології належить аналітичним апроксимаціям середовища й поля. Теоретичне підгрунтя такого підходу викладено в праці Страхова [2]. У цьому руслі активно розробляються конструктивні аналітичні апроксимації геологічного середовища. Зокрема, введені в науковий обіг апроксимації на основі типових блоково-шаруватих або сферично-циліндричних елементів [5]. Постульовано нагальну потребу доповнити ці конструкції апроксимаціями потенціальних полів [6]. Це, певною мірою, було зроблено в статті [7], де запропоновано новий математичний базис (диференціальне рівняння) для опису аномалій сили тяжіння. Також вивчаються апроксимації рельєфу поверхні спостережень шляхом параметризації заданими гладкими функціями [8].

Продовжуючи актуальні розробки аналітичних апроксимацій середовища, ми пропонуємо ***нову*** апроксимаційну схему для визначення контакту двох однорідних тяжіючих тіл, які належать до класу Сретенського, за заданим розподілом вертикальної компоненти аномалій сили тяжіння. Зауважимо, що аналітичні конструкції методу дозволяють реалізувати розпаралелювання обчислень за рахунок рекурентності виразів для розв'язання відповідної прямої задачі.

Відзначимо, що постановка та розв'язання прямих і обернених задач граві- й магнітометрії у фомулюванні для класу тіл Сретенського започатковані в працях Є. Г. Булаха [9]. Ці задачі викладено для числової моделі як з одного [10], так і кількох [11] рудних тіл. У силу вдалої та зручної параметризації вони зручні для практичного застосування в комплексі інтерпретації даних рудної геофізики. Однак формулювання самого класу Сретенського моделей аномальних тіл дозволяє представити пряму задачу гравіметрії у структурній постановці, чого дотепер не було зроблено. Поширення розв'язку цієї задачі на кілька кон-

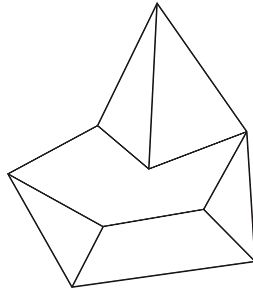


Рис. 1. Модель рудного тіла, для якої середня площина у смислі Л. Сретенського є неоднозначною

тактних поверхонь відповідатиме сучасній практиці моделювання складного геологічного середовища за комплексом геофізичних даних.

Постановка задачі. Нехай на деякій горизонтальній площині $z = 0$ (вісь z спрямована вниз) задані значення вертикальної похідної $U_z(x, 0)$ потенціалу сили тяжіння, зумовленого "нескінченним" шаром C (подовжується в обидва боки за профіль спостережень), видовженим уздовж осі y. Нехай шар C складається з двох пластів із постійною густиною $\sigma = \text{const}$, розділених горизонтальною контактною поверхнею H. Цей об'єкт належить класу двовимірних тіл, для яких існує *середня площина* Z_0 (вона проходить через тіло таким чином, що будь-який перпендикуляр до неї перетинає поверхню тіла лише в двох точках, по різні сторони від площини). Контактна поверхня H ундулює навколо середньої площини Z_0, не надто ухиляючись від неї, у смислі метрики банахового простору $\|H - Z_0\|_B \to \min\limits_{x\in D}$. У частинному випадку H збігатиметься із Z_0. Назвемо цей модельний клас тіл — класом Сретенського $\mathrm{Sr}(1, D)$, (структурний варіант), де *1* — означає сталу густину σ, а D — замкнену область (поверхню), виповнену тяжіючими масами.

Зауваження 1. Якщо площина спостережень (денна поверхня) не є горизонтальною, її можна апроксимувати будь-якою конструкцією $Z = H(x, y)$, в тому числі однією із запропонованих в статті [9].

Зауваження 2. Визначення класу $\mathrm{Sr}(1, D)$ через поняття *середня площина* не є конструктивним, оскільки застерігає лише від вжитку "глечикоподібних" тіл і ніяк не регламентує спосіб визначення середньої площини, наприклад, для множини багатокутників (рис. 1).

На нашу думку, подолати амбівалентність означення класу $\mathrm{Sr}(1, D)$ можна, залучивши диференціальні характеристики конкретного сімейства тіл, як, наприклад, зроблено в [8]. Утім, подібні міркування виходять за рамки даного повідомлення. Модель горизонтального циліндра апріорі задовольняє вимоги класу $\mathrm{Sr}(1, D)$.

Уточнимо характеристику класу $\mathrm{Sr}(1, D)$. Поєднуючи із середньою площиною аномального тіла координатну площину $\varsigma\o\eta$, аналітично опишемо область D, зайняту тілом

$$D = \{(\xi, \zeta)\colon a \leqslant \xi \leqslant b, \zeta^{(1)}(\xi) \leqslant \zeta \leqslant \zeta^{(2)}(\xi)\}, \tag{1}$$

де $-\infty < \zeta^{(i)} < \infty$ — певні контактні поверхні. При цьому межу ∂D області D можна представити як об'єднання двох контурів $\partial D_1 \bigcup \partial D_2$:

$$\partial D_i = \{(\zeta, \xi)\colon a \leqslant \xi \leqslant b, \zeta = \zeta^{(i)}(\xi), i = 1, 2\}. \tag{2}$$

Розглянемо підклас $\mathrm{Sr}(1, D_0)$ класу $\mathrm{Sr}(1, D)$, коли $a = -\infty$, $b = \infty$, а осі координат ξ й x, ζ й z паралельні. Тоді, не порушуючи загальності міркувань, можна представити область D_0

та її межі в аналітичному вигляді:

$$D_0 = \{(\xi, \zeta) \colon -\infty < \xi < \infty,\ z^{(1)} \leqslant \zeta \leqslant z^{(2)}\},$$
$$\partial D_{0i} = \{(\xi, \zeta) \colon -\infty < \xi < \infty,\ z^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi),\ i = 1, 2\}. \tag{3}$$

Нехай підклас $\mathrm{Sr}(1, D_0)$ тяжіючих тіл складається з двох контактних поверхонь

$$z^{(i)} = \zeta^{(i)}(\xi), \qquad -\infty < \zeta < \infty, \qquad i = 1, 2, \tag{4}$$

розділених середньою площиною $z = z_0 > 0$.

Поставимо задачу: визначити контакти (4) за значеннями вертикальної похідної $U_z(x, 0)$ потенціалу сили тяжіння.

Аналітичні властивості аномалій. Розв'язати вказану задачу допоможе аналіз властивостей похідних потенціалу сили тяжіння $U(x, z)$. Представимо ці похідні як

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x} = 2f\sigma \iint\limits_D \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta,$$
$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z} = 2f\sigma \iint\limits_D \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta, \tag{5}$$

де

$$D = \{(\xi, \zeta) \colon -\infty < \xi < \infty, 0 \leqslant \xi \leqslant \zeta(\xi)\}. \tag{6}$$

Внаслідок подання формули (6) таким чином, подвійні інтеграли в формулах (5) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x} = 2f\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_0^{\zeta(\xi)} \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta,$$
$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z} = 2f\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_0^{\zeta(\xi)} \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Зважаючи на результати, що отримані в статті [12], після ряду нескладних аналітичних перетворень матимемо співвідношення

$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial x} = 2f\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\zeta(\xi) - z}{\xi - x} d\zeta,$$
$$\frac{\partial U(x,z)}{\partial z} = f\sigma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta(\xi) - z]}{(\xi - x)^2 + [\zeta(x) - z]} d\zeta + \begin{cases} 2\pi f\sigma\zeta(x), & z \leqslant 0, \\ 2\pi f\sigma[\zeta(x) - 2z], & 0 < x < \zeta, \\ -2\pi f\sigma\zeta(x), & \zeta(x) \leqslant z. \end{cases} \tag{7}$$

Отже, функція $U_x(x, z)$ щодо z є неперервною, в той час як функція $U_z(x, z)$ щодо z є розривною. На підставі дослідження фундаментальних властивостей (7) контактів (4),

згідно з методикою аналізу гармонічних функцій, розвиненою в публікації [12], отримуємо при $z \to -0$ такі вирази зовнішніх похідних гравітаційного потенціалу:

$$\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial x} = 2f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\zeta^{(i)}(\xi)}{\xi - x}d\zeta,$$
$$\frac{\partial U_e(x,z)}{\partial z} = f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\pi\zeta^{(i)}(x) - \ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(\xi)]^2}d\zeta\right\}. \tag{8}$$

При цьому на середній площині $z = z_0$ ($\zeta^{(1)}(x) < z_0 < \zeta^{(2)}(x)$, $-\infty < x < \infty$) з тих самих співвідношень (7) знаходимо, що

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial x} = 2f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\zeta^{(i)}(\xi) - z_0}{\xi - x}d\zeta,$$
$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial z} = -2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) + 2\pi f\sigma_2[\zeta^{(2)}(x) - 2z_0] + f\sum_{i=1}^{2}\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(\xi)]^2}d\zeta. \tag{9}$$

Спосіб розв'язання. Очевидно, отримано розбіжності значення потенціалу на поверхні (8) і на середній площині (9). Це нескладно було передбачити, виходячи з співвідношення (7). Однак у цьому протиріччі закладена цікава можливість для розв'язання поставленої задачі.

Дійсно, знайдемо *внутрішню* межу похідної при обчисленні інтеграла Пуассона:

$$\frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial U(\eta,z_0)}{\partial z}\frac{z_0}{(\eta-x)^2 - z_0^2}d\eta \tag{10}$$

. Представимо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{\partial U(x,z_0)}{\partial z} = -2f\sigma_1\iint_{D_1}\frac{\zeta - z}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\xi d\zeta + 2f\sigma_2\iint_{D_2}\frac{\zeta - z}{(\xi-x)^2+(\zeta-z)^2}d\xi d\zeta$$

для тяжіючої області $D_i = \{(\xi,\zeta)\colon -\infty < \xi < \infty, 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta^{(i)}(\xi)\}$. Обчислюючи інтеграл (10), отримуємо з урахуванням наведеного вище зображення такий вираз:

$$\frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = -2\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) + 2\pi f\sigma_2\zeta^{(2)}(x) - f\sum_{i=1}^{2}(-1)^i\sigma_i\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(\xi)]^2}d\zeta. \tag{11}$$

Враховуючи значення зовнішньої межі (8) та виразу (11), знайдемо різницю меж

$$\frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} = 4\pi f\sigma_1\zeta^{(1)}(x) - 2f\sigma_1\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(x)]^2}{(\xi-x)^2+[\zeta^{(i)}(\xi)]^2}d\zeta.$$

Щоб спростити подальші викладки, позначимо цю різницю потенціалів через функцію $W(x)$:

$$W(x) = \left\{ \frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial z} \right\}.$$

Відтак, нами отримано нелінійне інтегральне рівняння

$$\zeta^{(1)}(x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(1)}(x)]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(2)}(\xi)]^2} d\zeta = W(x) \tag{12}$$

для визначення першого наближення контакту $z^{(1)} = \zeta^{(1)}(x)$, $-\infty < x < \infty$. Розв'язання подібних рівнянь започатковане в публікації [12].

Визначивши із останнього рівняння функцію $\zeta^{(1)}(x)$, можна обчислити наближення поля

$$\frac{\partial U_1(x,0)}{\partial z} = -2\pi f \sigma_1 \zeta^{(1)}(x) - f\sigma_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(1)}(x)]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(2)}(\xi)]^2} d\zeta. \tag{13}$$

А це, в свою чергу, дозволяє знайти в "чистому вигляді" ефект від подальшого контакту — у вигляді різниці *граничного* та *попереднього* значень вертикальної похідної потенціалу сили тяжіння:

$$\frac{\partial U_2(x,0)}{\partial z} = \frac{\partial U_e(x,0)}{\partial z} - \frac{\partial U_1(x,0)}{\partial z}.$$

Маючи цю величину, можна з рівняння, аналогічного рівнянню (13), тобто

$$2\pi d \sigma_2 \zeta^{(2)}(x) - f\sigma_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(1)}(x)]^2}{(\xi - x)^2 + [\zeta^{(2)}(\xi)]^2} d\zeta = \frac{\partial U_2(x,0)}{\partial z}, \tag{14}$$

обчислити чергове наближення контакту $z^{(2)} = \zeta^{(2)}(x)$, $-\infty < x < \infty$. Таким чином, було знайдено "верхню" і "нижню" межі області (1), що й розв'язує поставлену задачу (4). До речі, власне, самі контакти $\zeta^{(i)}(\xi)$ можна апроксимувати конструкціями, описаними в [11].

Зауваження 3. Наведені вище математичні викладки легко узагальнюються на випадок n меж $z^{(i)} = \zeta^{(i)}(x)$, $-\infty < x < \infty$, якщо між кожною парою цих меж можна провести середню площину (тобто якщо ці межі не виходять за межі класу $\mathrm{Sr}(1, D)$).

Таким чином, нами введено в науковий обіг нові апроксимаційні конструкції (12) й (13), (14), за допомогою яких можна ефективно відновити будову шаруватого геологічного середовища, зображеного парами $z^{(i)} = \zeta^{(i)}(x)$, $i = 1, 2$ ("верхня" і "нижня" межі) контактів, обмежених властивостями класу Сретенського $\mathrm{Sr}(1, D)$.

Доведено, що на класі $\mathrm{Sr}(1, D)$ послідовні наближення $\zeta^{(i)}(x)$ однозначні й стійкі (збігаються до заданого точного розв'язку $\zeta^{(0)}(x)$), якщо похибка вхідних даних не перевищує 3% від максимальної амплітуди аномалій $U_z(x, 0)$ [13].

Дискретизацію інтегральних рівнянь (12) й (13), (14) доцільно здійснити за допомогою відомих методів скінченновимірної редукції інтегральних рівнянь 1-го роду [14]. Алгоритм розв'язання задачі пройшов первинну апробацію на працездатність. У перспективі передбачається поширення аналітичних викладок на тривимірний випадок та апробація алгоритму на практичних матеріалах.

1. *Страхов В. Н.* Принципиально новая теория интерпретации данных о потенциальных полях (гравитационных и магнитных аномалий) // Геофиз. журн. – 2003. – **25**, № 1. – С. 3–7.
2. *Страхов В. Н.* Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Там же. – 2007. – **29**, № 1. – С. 56–84.
3. *Бычков С. Г., Симанов А. А., Хохлова В. В.* Современные процедуры вычисления аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических наблюдениях // Вестн. Перм. ун-та. Геология. – 2013. – Вып. **3**(20). – С. 61–70. http://cyberleninka.ru/article/n/.
4. *Страхов В. Н., Керимов И. А., Степанова И. Э. и др.* Новый информационный базис гравиметрии и магнитометрии // Геофизика и математика. – Пермь: Горн. ин-т УрО РАН, 2001. – С. 274–277.
5. *Страхов В. Н* Линейные аналитические аппроксимации рельефа поверхности Земли // Геофизика и математика. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – С. 12–19.
6. *Якимчик А. І., Чорна О. А.* Про побудову аналітичних апроксимацій елементів аномальних гравітаційних полів // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Геологія. – 2010. – Вип. 51. – С. 12–14.
7. *Дубовенко Ю. І.* Відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта в задачі Алексідзе // Там само. – 2011. – Вип. 55. – С. 61–65.
8. *Дубовенко Ю. И., Черная О. А.* Об определении плотностного контакта в сложнопостроенной среде // XI Междунар. конф. по геоинформатике – теоретические и прикладные аспекты (“Геоинформатика-2012”), Киев, 14–17 мая 2012 г.: Сб. науч. тр. – Киев: ТОВ “Карбон ЛТД”, 2012. – CD-ROM. – С. 3494.
9. *Булах Е. Г.* Обратные задачи гравиметрии для геологических моделей класса Сретенского // Доп. НАН України. – 2002. – № 1. – С. 117–119.
10. *Булах Е. Г.* О другом аппроксимационном построении геологической модели класса Сретенского для решения обратных задач гравиметрии // Там само. – 2002. – № 5. – С. 128–132.
11. *Булах Е. Г., Слободник Н. А.* Обратные задачи магнитометрии для совокупности тел класса Л. Н. Сретенского // Геофиз. журн. – 2008. – **30**, № 3. – С. 49–55.
12. *Дубовенко Ю. І., Чорний А. В.* Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Там же. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77–92.
13. *Дубовенко Ю. И.* Об определении плотностных неоднородностей в классе Сретенского // XV Урал. молод. науч. шк. по геофизике, 24–29 марта 2014 г., Екатеринбург: Сб. докл. – Екатеринбург: ИГф УрО РАН, 2014. – С. 84–86.
14. *Верлань А. Ф, Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.10.2014

Ю. И. Дубовенко

Об определении контакта в модельном классе Сретенского

Сформулирована обратная контактная задача гравиметрии для контактной поверхности в классе Сретенского. Доказана разрывность вертикальной производной силы тяжести, фигурирующей в ее правой части. Эта особенность использована для сведения задачи к альтернативной постановке в виде интегрального уравнения 1-го рода. Путем разностного анализа границ соответствующих интегралов выведен эффективный способ последовательного вычисления контактов. Задача обобщается на n границ и сохраняет корректность в рамках класса Сретенского.

Yu. I. Dubovenko

On the definition of a contact within the Sretenskii model class

The inverse contact problem of gravity inversion for a density interface within the Sretenskii class is posed. A discontinuity of the gravity vertical derivative, which appears on problem's right-hand side, is proved. This feature is used to reduce the problem to the alternative statement in the form of the 1^{st} kind integral equation. By means of the residual analysis of the boundaries for the corresponding integrals, an efficient technique for the successive calculation of the density interface is developed. The problem is generalized onto the case of n boundaries, while preserving its correctness within the Sretenskii class.